Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Домашнее задание 1. Срок сдачи 9 октября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Под движениями в этом листке подразумеваются все движения евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, как собственные (сохраняющие ориентацию), так и несобственные (меняющие ориентацию).

Задача 1. Найдите группу движений плоскости, сохраняющих знак ∞. (Для определённости можно считать, что знак составлен из двух равных окружностей, касающихся друг друга внешним образом.)

Задача 2. Найдите группу вращений трёхмерного пространства, сохраняющих правильную треугольную призму. (По определению основания такой призмы — равносторонние треугольники, а боковые грани — прямоугольники.)

Задача 3. Пусть C — куб в трёхмерном пространстве, а ℓ — одна из прямых, соединяющих центры его противоположных граней. Определим погруппу H в группе симметрий G куба C, как стабилизатор прямой ℓ, то есть

$$H = \{h \in G \mid h(\ell) = \ell\}.$$

Найдите группу H и выпишите матрицы всех её элементов в каком-нибудь базисе.

Задача 4. Обозначим через V пространство однородных многочленов от x и y степени два с комплексными коэффициентами, рассматриваемое как комплексное векторное пространство. Сопоставим каждой матрице A из группы $SL_2(\mathbb{C})$ отображение $\rho(A) : V \to V$ по правилу:

$$[\rho(A)f](x, y) = f(ax + by, cx + dy), \text{ где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := A^{-1}.$$

(а) Является ли $\rho(A)$ линейным оператором? Если да, то выпишите его матрицу в базисе (x^2, xy, y^2).

(б) Задаёт ли отображение $A \mapsto \rho(A)$ представление группы $SL_2(\mathbb{C})$ на пространстве V? Если да, то то найдите все инвариантные подпространства в V.

Задача 5. Пусть подгруппа W в группе симметрий G куба C из задачи 3 порождена отражениями относительно плоскостей, содержащих пары противоположных рёбер куба.

(а) Найдите порядок группы W.

(б) Найдите минимальное такое n, для которого имеется инъективный гомоморфизм $W \to S_n$.