

**Семинар 1. Вспомнить всё.**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Может ли вещественная  $5 \times 5$  матрица удовлетворять следующим уравнениям

$$(a) (x^2 + 1)^m(x^2 - 1)^n = 0; \quad (b) (x^2 + 1)^m(x^2 + 2)^n = 0; \quad (v) (x^5 - 1)^m = 0$$

для некоторых натуральных  $m$  и  $n$ ? Если такая матрица существует, то чему может быть равен её минимальный многочлен?

**Задача 2.** Является ли факторкольцо  $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 1, p)$  полем при

$$(a) p = 2; \quad (b) p = 3; \quad (v) p = 5?$$

**Задача 3.** Найдите все нормальные подгруппы в группе симметрий

$$(a) \text{ правильного шестиугольника}; \quad (b) \text{ тетраэдра}; \quad (v) \text{ куба.}$$

**Задача 4.** (a) Пусть  $V$  — пространство  $2 \times 2$  вещественных симметрических матриц. Определим на  $V \times V$  функцию  $(\cdot, \cdot)$  формулой:

$$(A, B) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B).$$

Является ли функция  $(\cdot, \cdot)$  симметричной билинейной формой на  $V$ ? Если является, то найдите сигнатуру квадратичной формы  $(A, A)$  на  $V$ .

(б) Докажите, что форма  $(\cdot, \cdot)$  из пункта (a) является удвоенной поляризацией определителя.

(в) Пусть  $V$  — пространство  $3 \times 3$  вещественных симметрических матриц. Обозначим через  $\text{Mdet}$  поляризацию определителя, то есть смешанный определитель (это трилинейная форма). Зафиксируем  $C \in V$  и определим на  $V$  билинейную форму

$$(A, B)_C = \text{Mdet}(A, B, C).$$

Найдите сигнатуру формы  $(\cdot, \cdot)_C$  на  $V$ .

(г)\*[Неравенство Александра–Фенхеля на смешанные дискриминанты.] Обобщите результат пункта (в) на вещественные симметрические  $n \times n$  матрицы.

**Задача 5.** Группа действует с двумя орбитами на множестве из пяти элементов. При этом действие точное (то есть только единичный элемент группы действует как тождественное преобразование). Одна орбита состоит из двух элементов, а вторая из трёх. Найдите все такие группы с точностью до изоморфизма.

**Задача 6.** Найдите все конечные группы (с точностью до изоморфизма), в которых есть ровно 3 класса сопряжённости.