

Семинар 2. Группы.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. В некоторой группе для некоторых трёх элементов выполнено равенство $ghk = e$. Следует ли из него равенство

(а) $hkg = e$; (б) $hdk = e$?

Задача 2. Постройте все возможные изоморфизмы между группой вычетов $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ с операцией сложения и мультипликативной группой вычетов $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ с операцией умножения.

Задача 3. (а) Вспомните сами или попросите преподавателя напомнить вам определение прямого произведения двух групп.

(б) Верно ли, что каждая подгруппа в прямом произведении $G_1 \times G_2$ имеет вид $H_1 \times H_2$, где H_1 — подгруппа в группе G_1 , а H_2 — подгруппа в группе G_2 ?

Задача 4. Какие из следующих групп представляются в виде прямого произведения двух меньших групп?

(а) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; (б) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; (в) S_3 ; (г) D_4 ; (д) D_5 ; (е) D_6 .

Задача 5. (а) Вспомните сами или попросите преподавателя напомнить вам определение центра группы.

(б) Найдите центр группы $GL_n(\mathbb{R})$ и $SL_n(\mathbb{R})$.

(в) Изоморфны ли группы $PGL_n(\mathbb{R})$ (=факторгруппа группы $GL_n(\mathbb{R})$ по центру) и $PSL_n(\mathbb{R})$ (=факторгруппа группы $SL_n(\mathbb{R})$ по центру)?

Задача 6. Постройте изоморфизмы групп:

(а) $S_3 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2)$; (б) $S_4 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_3)$; (в) $A_5 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_4)$; (г)^{*} $S_5 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_5)$.

Через \mathbb{F}_q обозначается конечное поле из q элементов.