Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Семинар 3. Линейные отображения и матрицы.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Под движениями в этом листке подразумеваются все движения евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, как собственные (сохраняющие ориентацию), так и несобственные (меняющие ориентацию).

Задача 1. Пусть Δ_n — правильный n-угольник в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат и вершиной в точке $(1, 0)$. Выпишите матрицы всех движений плоскости, сохраняющих Δ_n для

(а) $n = 3$; (б) $n = 4$.

Задача 2. Предъявите такой базис в $\mathbb{R}^2$, в котором линейные операторы из пункта 1(а) будут иметь матрицы с рациональными коэффициентами.

Задача 3. Найдите порядок группы всех движений пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих

(а) правильный n-мерный симплекс; (б) n-мерный куб.

Задача 4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ определим оператор M_A на пространстве всех вещественных 2×2-матриц формулой

$$M_A : X \mapsto AX.$$

Найдите базис, в котором оператор M_A диагонализуется.

Задача 5. Для диагональной матрицы с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали определим оператор $Ad(A)$ на пространстве всех вещественных $n \times n$-матриц формулой

$$Ad(A) : X \mapsto AXA^{-1}.$$

Найдите базис, в котором оператор $Ad(A)$ диагонализуется. Чему равны собственные числа оператора $Ad(A)$?

Задача 6. Рассмотрим присоединённое действие (=действие сопряжениями как в задаче 5) группы $SL_2(\mathbb{C})$ на пространстве всех комплексных 2×2-матриц.

(а) Найдите все инвариантные подпространства этого действия.

(б) Постройте сюръективный гомоморфизм $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$.

(Указание: рассмотрите присоединённое действие группы $SL_2(\mathbb{C})$ на трёхмерном инвариантном подпространстве из пункта (а) и покажите, что это действие сохраняет билинейную форму $(X, Y) := \mathrm{Tr}(XY)$.)