

Домашнее задание 2. Срок сдачи 23 октября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Сопоставим каждому целому числу $n \in \mathbb{Z}$ матрицу

$$\rho(n) := \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(а) Проверьте, что отображение

$$\rho : \mathbb{Z} \rightarrow GL_3(\mathbb{R}); \quad \rho : n \mapsto \rho(n)$$

задаёт представление группы \mathbb{Z} на координатном пространстве \mathbb{R}^3 .

(б) Найдите все $\rho(\mathbb{Z})$ -инвариантные подпространства в \mathbb{R}^3 .

(в) Является ли ρ вполне приводимым представлением?

Задача 2. Обозначим через V пространство однородных многочленов от x и y степени два с вещественными коэффициентами, рассматриваемое как вещественное векторное пространство. Сопоставим каждой матрице A из группы $SO_2(\mathbb{R})$ отображение $\rho(A) : V \rightarrow V$ по правилу:

$$[\rho(A)f](x, y) = f(ax + by, cx + dy), \quad \text{где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := A^{-1}.$$

Разложите представление (ρ, V) в прямую сумму неприводимых представлений.

Задача 3. Постройте два неизоморфных неприводимых двумерных представления группы диэдра D_5 .

Задача 4. Будем рассматривать аффинное пространство \mathbb{R}^8 как пространство матриц размера 2×2 с комплексными коэффициентами. Опишите касательное пространство в точке $E \in \mathbb{R}^8$ к вещественным подмногообразиям

(а) U_2 ; (б) SU_2

и найдите их размерности. Какие из этих подмногообразий компактны?

Задача 5. Определим представление группы SU_2 на вещественном пространстве \mathfrak{su}_2 всех косоэрмитовых комплексных 2×2 -матриц с нулевым следом:

$$\rho(g)A = gAg^{-1}, \quad \text{где } g \in SU_2, \quad A \in \mathfrak{su}_2$$

(напомним, что такое представление называется *присоединённым*).

(а) Проверьте корректность определения.

(б) Постройте на \mathfrak{su}_2 положительно определённую SU_2 -инвариантную симметрическую билинейную форму.