

Домашнее задание 3. Срок сдачи 6 ноября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Обозначим через  $G$  группу вращений трёхмерного пространства, сохраняющих параллелепипед

$$\Pi = \{-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, -2 \leq x_3 \leq 2\}.$$

Разложите тавтологическое представление группы  $G$  в прямую сумму неприводимых.

**Задача 2.** Пусть  $\chi$  — характер представления конечной группы  $G$ . Докажите или опровергните тождество:

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}.$$

**Задача 3.** Напомним, что группа  $Q_8$  определяется как подмножество  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  в алгебре кватернионов  $\mathbb{H}$ , и групповая операция на  $Q_8$  совпадает с умножением кватернионов. Докажите, что четырёхмерное представление группы  $Q_8$ , заданное умножением на кватернионах, является неприводимым, если его рассматривать как вещественное представление.

**Задача 4.** Пусть  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  — представление группы  $G$ . Обозначим через  $S^2\rho$  его симметрический квадрат, то есть представление

$$S^2\rho : G \rightarrow GL(S^2V); \quad S^2\rho : g \mapsto S^2\rho(g).$$

Выпишите явную формулу, выражающую характер  $\chi_{S^2\rho}$  представления  $S^2\rho$  через характер  $\chi_\rho$  представления  $\rho$ .

**Задача 5.** (а) Выпишите таблицу характеров неприводимых комплексных представлений группы  $Q_8$ .

(б) Изоморфны ли группы  $D_4$  и  $Q_8$ ?

(в) Соппадают ли таблицы характеров групп  $D_4$  и  $Q_8$ ?