Контрольная работа, вариант II, ответы и решения

Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Продолжительность контрольной — 80 минут. На полный балл достаточно решить любые 5 задач. Можно пользоваться любыми неинтерактивными материалами. Если используете в решении теорему без доказательства, то приведите точную формулировку теоремы.

Задача 1. Постройте три комплексных двумерных попарно неизоморфных представления группы диэдра D_4.

Ответ (один из возможных): (1) двумерное неприводимое представление ρ симметриями квадрата; (2) прямая сумма двух тождественных одномерных представлений (все элементы действуют как тождественный оператор E); (3) прямая сумма двух детерминантных одномерных представлений (g действует как $\det(\rho(g))E$).

Решение: (1) не изоморфно ни (2), ни (3), потому что (1) — неприводимо, а (2) и (3) — приводимы. (2) и (3) не изоморфны, потому что у них разные характеры (у (2) характер тождественно равен 2, а у (3) принимает значение -2, если $\rho(g)$ — несобственное движение).

Задача 2. Докажите или опровергните: (а) Все вещественные неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ одномерны.

(б) Все комплексные конечномерные неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ одномерны.

Ответ: (а) неверно; (б) верно.

Решение: (а) Двумерное вещественное представление поворотами равностороннего треугольника неприводимо, так как поворот на $\frac{2\pi}{3}$ не имеет вещественных собственных чисел, следовательно, не имеет одномерных инвариантных подпространств.

(б) Группа $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ абелева, а на лекции доказывалась теорема, что все неприводимые комплексные конечномерные представления абелевой группы одномерны.

Задача 3. Вычислите характер тавтологического представления группы симметрий правильного тетраэдра.

Ответ:

	e	$(12)(34)$	(12)	(1234)	(123)
	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
χ_4	3	-1	1	-1	0

Решение: На семинаре обсуждалось, что группа симметрий тетраэдра изоморфна S_4 (симметрия задаёт перестановку четырёх вершин тетраэдра), а в S_4 всего 5 классов сопряжённости: (e), 3 перестановки циклического типа (12)(34), 6 перестановок типа (12), 6 типа (1234) и 8 типа (123). Перестановки типа (12)(34) и типа (123) реализуются вращением тетраэдра на угол π и $\frac{2\pi}{3}$, соответственно, поэтому след оператора равен -1 в первом случае и 0 — во втором. Перестановка типа (12) реализуется отражением относительно плоскости, поэтому след оператора равен 1. Значение x характера χ на (1234) можно вычислить, используя неприводимость представления симметриями тетраэдра. Тогда из соотношения ортогональности $(\chi, \chi_1) = 0$, где χ_1 — характер тождественного одномерного представления, следует, что

$$3 - 3 + 6 + 6x = 0,$$

поэтому $x = -1$.

Задача 4. В некоторой группе G всего четыре класса сопряжённости, состоящих из 1, 2, 2 и 5 элементов. Найдите недостающие строки и заполните пустые клетки в её таблице характеров:

	(1)	(2)	(2)	(5)
χ_1	1	1	1	1
χ_2			$-c$	0

Через c обозначается золотое сечение $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ:

	(1)	(2)	(2)	(5)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	2	$c-1$	$-c$	0
χ_3	2	$-c$	$c-1$	0
χ_4	1	1	1	-1

Решение: На лекции доказывалось, что количество неприводимых представлений равно количеству классов сопряжённости, поэтому строк будет 4. Также доказывалось, что сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы. Есть единственое представление числа 10 в виде суммы квадратов натуральных чисел:

$$10 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.$$

Отсюда дозаполним первый столбец таблицы (столбец размерностей). Поскольку во второй строке есть 0, соответствующее представление не может быть одномерным (след обратимого оператора на одномерном пространстве не может быть равен нулю), поэтому его размерность 2. Тем самым во второй строке остался один неизвестный элемент, обозначим его через x.

	(1)	(2)	(2)	(5)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	2	x	$-c$	0
χ_3	2			
χ_4	1			

Пользуясь соотношением ортогональности $(\chi_2, \chi_1) = 0$, находим, что

$$2 + 2(x - c) = 0,$$

откуда $x = c - 1$.

Чтобы найти характер одномерного представления χ_4, заметим, что поскольку у данной в задаче группы G всего два одномерных представления $\chi_1 : G \to \mathbb{C}^*$ (тождественное представление) и $\chi_4 : G \to \mathbb{C}^*$, то образ $\chi_4(G)$ состоит только из чисел ± 1 (иначе можно было бы построить больше характеров, используя автоморфизмы большей группы $\chi_4(G)$). Это наблюдение в сочетании с соотношением ортогональности $(\chi_4, \chi_1) = 0$ позволяет однозначно дозаполнить строку для χ_4.

	(1)	(2)	(2)	(5)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	2	-1	$-c$	0
χ_3	2			
χ_4	1	1	1	-1

Теперь строка для χ_3 единственным образом заполняется с помощью соотношений ортогональности $(\chi_3, \chi_4) = (\chi_3, \chi_1) = (\chi_3, \chi_2) = 0$.

Задача 5. Пусть группа G действует на конечном множестве X из n элементов. Рассмотрим n-мерное комплексное векторное пространство V, и занумеруем какой-нибудь базис $\{e_x\}_{x\in X}$ в V элементами множества X. Определим *перестановочное представление* $\rho : G \to GL(V)$ следующим образом

$$\rho(g)e_x = e_{gx}.$$

Разложите на неприводимые представления перестановочное представление группы S_4, действующей на вершинах куба.

Ответ: $\chi_\rho = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$, где характеры нумеруются согласно следующей таблице характеров группы S_4:

	e	$(12)(34)$	(12)	(1234)	(123)
	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	3	-1	1	-1	0
χ_4	3	-1	-1	1	0
χ_5	2	2	0	0	-1

Решение: В задаче имелось в виду действие S_4 на кубе вращениями (другие интерпретации приветствуются при наличии правильного решения). Найдём характер представления ρ. След оператора $\rho(g)$ равен количеству неподвижных точек при действии вращения g на вершинах куба. Если ось вращения проходит через вершины куба (то есть ось совпадает с одной из пространственных диагоналей), то таких точек две. Если не проходит, то ни одной. Отсюда получаем:

	e	$(12)(34)$	(12)	(1234)	(123)
	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
χ_ρ	8	0	0	0	2

Далее действуем тем же методом, который более подробно описан в решении задачи 6: вычисляем (χ_ρ, χ_i) для всех i, пользуясь вышеприведённой таблицей характеров группы S_4.

Задача 6. Обозначим через V пространство однородных многочленов от x и y степени три с комплексными коэффициентами, рассматриваемое как комплексное векторное пространство. Пусть $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ — неприводимое двумерное представление группы S_3. Определим представление $Sym^3\rho : S_3 \to GL(V)$ на пространстве V по правилу:

$$[Sym^3\rho(g)f](x, y) = f(ax + by, cx + dy), \text{ где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \rho(g)^{-1}.$$

Разложите представление $(Sym^3\rho, V)$ в прямую сумму неприводимых представлений.

Ответ: $V = U \oplus T \oplus A$, где U — неприводимое двумерное представление, T — тождественное одномерное, а A — знаковое представление.

Решение: Пусть $V = m_U U \oplus m_T T \oplus m_A A$ — разложение представления V на неприводимые. Согласно утверждению, оставленному на лекции в качестве упражнения, кратность вхождения неприводимого представления V_i в произвольное представление V равна скалярному произведению (χ_{V_i}, χ_V). Сначала найдём χ_V.

Для удобства будем считать, что ρ действует целочисленными матрицами, как в задаче 2 семинара 4:

$$\rho : (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1\ 3\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда базисные мономы x^3, x^2y, xy^2, y^3 перейдут при действии $Sym^3\rho((1\ 2))$ в мономы y^3, y^2x, yx^2, x^3. След такого отображения равен 0. Поэтому $\chi_V((1\ 2)) = 0$.

При действии $Sym^3\rho((1\ 2\ 3))$ эти же мономы перейдут в многочлены $-(x+y)^3 = -x^3 + \ldots$, $(x+y)^2x = 2x^2y + \ldots$, $-(x+y)x^2 = 0 \cdot xy^2 + \ldots$, $x^3 = 0 \cdot y^3 + \ldots$, соответственно. След такого отображения равен $-1 + 2 = 1$, то есть $\chi_V((1\ 2\ 3)) = 1$.

Для удобства выпишем хорошо известную нам таблицу характеров группы S_3 и припишем к ней дополнительную строку для χ_V:

	e	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
	(1)	(3)	(2)
χ_T	1	1	1
χ_A	1	-1	1
χ_U	2	0	-1
χ_V	4	0	1

При помощи таблицы находим, что $(\chi_T, \chi_V) = (\chi_U, \chi_V) = (\chi_A, \chi_V) = 1$.