Контрольная работа, вариант I, ответы и решения

Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Продолжительность контрольной — 80 минут. На полный балл достаточно решить любые 5 задач. Можно пользоваться любыми неинтерактивными материалами. Если используете в решении теорему без доказательства, то приведите точную формулировку теоремы.

Задача 1. Постройте три комплексных двумерных попарно неизоморфных представления группы перестановок S_3.

Ответ (один из возможных): (1) двумерное неприводимое представление симметриями треугольника; (2) прямая сумма двух тождественных одномерных представлений (все перестановки действуют как тождественный оператор E); (3) прямая сумма двух знаковых одномерных представлений (перестановка σ действует как $\operatorname{sgn}(\sigma)E$).

Решение: (1) не изоморфно ни (2), ни (3), потому что (1) — неприводимо, а (2) и (3) — приводимы. (2) и (3) не изоморфны, потому что у них разные характеры (у (2) характер тождественно равен 2, а у (3) принимает значение -2 на нечётных перестановках).

Задача 2. Докажите или опровергните: (а) Все вещественные неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ одномерны.

(б) Все комплексные конечномерные неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ одномерны.

Ответ: (а) неверно; (б) верно.

Решение: (а) Двумерное вещественное представление поворотами квадрата неприводимо, так как поворот на $\frac{\pi}{2}$ не имеет вещественных собственных чисел, следовательно, не имеет одномерных инвариантных подпространств.

(б) Группа $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ абелева, а на лекции доказывалась теорема, что все неприводимые комплексные конечномерные представления абелевой группы одномерны.

Задача 3. Вычислите характер тавтологического представления группы вращений куба.

Ответ:

	e	$(12)(34)$	(12)	(1234)	(123)
	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
χ_3	3	-1	-1	1	0

Решение: На семинаре обсуждалось, что группа вращений куба изоморфна S_4 (вращение задаёт перестановку четырёх пространственных диагоналей куба), а в S_4 всего 5 классов сопряжённости: (e), 3 перестановки циклического типа $(12)(34)$, 6 перестановок типа (12), 6 типа (1234) и 8 типа (123). Перестановки порядка два (то есть типа $(12)(34)$ или (12)) и порядка три (то есть (123)) реализуются вращением куба на угол π и $\frac{2\pi}{3}$, соответственно, поэтому след оператора равен -1 в первом случае и 0 — во втором. Значение x характера χ на (1234) можно вычислить, используя неприводимость представления вращениями куба. Тогда из соотношения ортогональности $(\chi, \chi_1) = 0$, где χ_1 — характер тождественного одномерного представления, следует, что

$$3 - 3 - 6 + 6x = 0,$$

поэтому $x = 1$.

Задача 4. В некоторой группе G всего четыре класса сопряжённости, состоящих из 1, 3, 4 и 4 элементов. Найдите недостающие строки и заполните пустые клетки в её таблице характеров:

	(1)	(3)	(4)	(4)
χ_1	1	1	1	1
χ_2			0	0

Ответ:

	(1)	(3)	(4)	(4)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	0
χ_3	1	1	ω	$\overline{\omega}$
χ_4	1	1	$\overline{\omega}$	ω

,

где $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

Решение: На лекции доказывалось, что количество неприводимых представлений равно количеству классов сопряжённости, поэтому строк будет 4. Также доказывалось, что сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы. Есть единственое представление числа 12 в виде суммы квадратов натуральных чисел:

$$12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.$$

Отсюда дозаполним первый столбец таблицы (столбец размерностей). Поскольку во второй строке есть 0, соответствующее представление не может быть одномерным (след обратимого оператора на одномерном пространстве не может быть равен нулю), поэтому его размерность 3. Тем самым во второй строке остался один неизвестный элемент, обозначим его через x.

	(1)	(3)	(4)	(4)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	3	x	0	0

Пользуясь соотношением ортогональности $(\chi_2, \chi_1) = 0$, находим, что

$$3 + 3x = 0,$$

откуда $x = -1$.

Чтобы найти характер одномерных представлений χ_3 и χ_4, заметим, что поскольку у данной в задаче группы G всего три одномерных представления, то образ $\chi_3(G)$ при гомоморфизме $\chi_3 : G \to \mathbb{C}^*$ состоит только из корней кубических из единицы, то есть из 1, ω и $\omega^2 = \overline{\omega} = \omega^{-1}$ (иначе можно было бы построить больше характеров, используя автоморфизмы большей группы $\chi_3(G)$). Это наблюдение в сочетании с соотношениями ортогональности $(\chi_3, \chi_2) = 0$ и $(\chi_4, \chi_2) = 0$ позволяет однозначно (с точностью до перестановки строк) дозаполнить строки для χ_3, χ_4.

Задача 5. Пусть группа G действует на конечном множестве X из n элементов. Рассмотрим n-мерное комплексное векторное пространство V, и занумеруем какой-нибудь базис $\{e_x\}_{x \in X}$ в V элементами множества X. Определим *перестановочное представление* $\rho : G \to GL(V)$ следующим образом

$$\rho(g)e_x = e_{gx}.$$

Разложите на неприводимые представления перестановочное представление группы S_4, действующей на гранях куба.

Ответ: $\chi_\rho = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5$, где характеры нумеруются согласно следующей таблице характеров группы S_4:

	e	$(12)(34)$	(12)	(1234)	(123)
	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	3	-1	1	-1	0
χ_4	3	-1	-1	1	0
χ_5	2	2	0	0	-1

Решение: В задаче имелось в виду действие S_4 на кубе вращениями (другие интерпретации приветствуются при наличии правильного решения). Найдём характер представления ρ. След оператора $\rho(g)$ равен количеству неподвижных точек при действии вращения g на гранях куба. Если ось вращения проходит через середины граней куба, то таких точек две. Если не проходит, то ни одной. Отсюда получаем:

	e	$(12)(34)$	(12)	(1234)	(123)
	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
χ_ρ	6	2	0	2	0

Далее действуем тем же методом, который более подробно описан в решении задачи 6: вычисляем (χ_ρ, χ_i) для всех i, пользуясь вышеприведённой таблицей характеров группы S_4.

Задача 6. Обозначим через V пространство однородных многочленов от x и y степени четыре с комплексными коэффициентами, рассматриваемое как комплексное векторное пространство. Пусть $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ — неприводимое двумерное представление группы S_3. Определим представление $Sym^4\rho : S_3 \to GL(V)$ на пространстве V по правилу:

$$[Sym^4\rho(g)f](x, y) = f(ax + by, cx + dy), \text{ где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \rho(g)^{-1}.$$

Разложите представление $(Sym^4\rho, V)$ в прямую сумму неприводимых представлений.

Ответ: $V = 2U \oplus T$, где U — неприводимое двумерное представление, а T — тождественное одномерное.

Решение: Пусть $V = m_U U \oplus m_T T \oplus m_A A$ — разложение представления V на неприводимые (через A обозначено знаковое представление группы S_3). Согласно утверждению, оставленному на лекции в качестве упражнения, кратность вхождения неприводимого представления V_i в произвольное представление V равна скалярному произведению (χ_{V_i}, χ_V). Сначала найдём χ_V.

Для удобства будем считать, что ρ действует целочисленными матрицами, как в задаче 2 семинара 4:

$$\rho : (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1\ 3\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда базисные мономы x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 перейдут при действии $Sym^4\rho((1\ 2))$ в мономы y^4, y^3x, y^2x^2, yx^3, x^4. След такого отображения равен 1. Поэтому $\chi_V((1\ 2)) = 1$.

При действии $Sym^4\rho((1\ 2\ 3))$ эти же мономы перейдут в многочлены $(x + y)^4 = x^4 + \ldots$, $-(x + y)^3x = -3x^3y + \ldots$, $(x + y)^2x^2 = x^2y^2 + \ldots$, $-(x + y)x^3 = 0 \cdot xy^3 + \ldots$,

$x^4 = 0 \cdot y^4 + \ldots$, соответственно. След такого отображения равен $1 - 3 + 1 = -1$, то есть $\chi_V((1\ 2\ 3)) = -1$.

Для удобства выпишем хорошо известную нам таблицу характеров группы S_3 и припишем к ней дополнительную строку для χ_V:

	e	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
	(1)	(3)	(2)
χ_T	1	1	1
χ_A	1	-1	1
χ_U	2	0	-1
χ_V	5	1	-1

При помощи таблицы находим, что $(\chi_T, \chi_V) = 1$, $(\chi_U, \chi_V) = 2$. Поэтому $V = 2U \oplus T \oplus m_A A$, откуда $m_A = 0$ из соображений размерности.