Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Семинар 4. Вполне приводимые представления.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Приведите пример конечномерного представления группы $\mathbb{Z}$, которое не является вполне приводимым.

Задача 2. Определим представление группы S_3 на $\mathbb{R}^2$, задав гомоморфизм $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{R})$ на элементарных транспозициях:

$$\rho : (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Продолжите отображение ρ на остальные перестановки из S_3 и убедитесь, что результат корректно определён. (Что именно надо проверить, чтобы в этом убедиться?)

(б) Предъявите явно $\rho(S_3)$-инвариантное скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$.

Задача 3. (а) Докажите, что в каждом неприводимом двумерном представлении $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ можно выбрать базис так, что

$$\rho : (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Какой вид в этом базисе может иметь матрица $\rho(1\ 2\ 3)$? (Через $(1\ 2\ 3)$ обозначается 3-цикл: $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$.)

(б) Докажите, что у S_3 есть только одно неприводимое двумерное представление с точностью до сопряжённости.

(в) Пусть $\rho : S_3 \to GL(V)$ — произвольное конечномерное комплексное представление группы S_3. Докажите, что собственный вектор оператора $\rho(1\ 2\ 3)$ лежит в S_3-инвариантном подпространстве размерности не выше 2.

(г) Классифицируйте все неприводимые комплексные представления группы S_3.

Задача 4. Рассмотрим 6-мерное векторное пространство V, и занумеруем какой-нибудь базис $\{e_g\}_{g \in S_3}$ в V элементами группы S_3. Определим *регулярное представление* $\rho : S_3 \to GL(V)$ следующим образом:

$$\rho(h)e_g = e_{hg}.$$

Разложите регулярное представление на неприводимые подпредставления.

Задача 5. Определим представление ρ_n группы SU_2 (или $SL_2(\mathbb{C})$, если это вам ближе) на пространстве $\mathbb{C}^n[x, y]$ однородных многочленов степени n от двух переменных

$$[\rho_n(A)f](x, y) = f(ax + by, cx + dy), \text{ где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := A^{-1}.$$

Разложите на неприводимые представления тензорное произведение представлений $\rho_n \otimes \rho_m$. (Если общий случай вызывает затруднения, разберите случай $m = n = 1$.)