Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Семинар 5. Алгебры.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Комплексные числа). (а) Пусть (a, b) — пара вещественных чисел, Проверьте, что оператор на $\mathbb{R}^2$, заданный в стандартном базисе матрицей:

$$C(a,b) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

либо равен нулю, либо является преобразованием подобия (относительно метрики, заданной с помощью стандартного скалярного произведения на $\mathbb{R}^2$).

(б) Обозначим через $\mathfrak{C}$ множество всех матриц $C(a,b)$ из пункта (а). Проверьте, что $\mathfrak{C}$ является подалгеброй в алгебре всех вещественных матриц размера 2×2.

(в) Постройте изоморфизм между $\mathfrak{C}$ и $\mathbb{C}$.

Задача 2 (Кватернионы). (а) Пусть (a, b) — пара комплексных чисел. Проверьте, что оператор на $\mathbb{C}^2$, заданный в стандартном базисе матрицей:

$$Q(a,b) := \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix},$$

либо равен нулю, либо является преобразованием подобия (относительно метрики, заданной с помощью стандартного эрмитового произведения на $\mathbb{C}^2$). Во сколько раз $Q(a,b)$ увеличивает расстояния?

(б) Проверьте, что множество матриц $\{Q(a,b) \mid \det(Q(a,b)) = 1\}$ совпадает со специальной унитарной группой SU_2.

(в) Обозначим через $\mathbb{H}$ множество всех матриц $Q(a,b)$ из пункта (а). Проверьте, что $\mathbb{H}$ является подалгеброй с делением в алгебре всех комплексных матриц размера 2×2.

(г) Предъявите такой базис (E, I, J, K) в алгебре $\mathbb{H}$, рассматриваемой как вещественное векторное пространство, для которого выполнены соотношения:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E; \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Задача 3 (Группы Ли). Будем рассматривать аффинное пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ как пространство матриц размера $n \times n$. Опишите касательное пространство в точке $E \in \mathbb{R}^{n^2}$ к следующим подмногообразиям и найдите их размерности:

(а) $GL_n(\mathbb{R})$; (б) $SL_n(\mathbb{R})$; (в) $SO_n(\mathbb{R})$.

Задача 4 (Исключительные гомоморфизмы). Постройте нетривиальные гомоморфизмы

(а) $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$, (б) $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$

(в) $Sp_4(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$, (г) $SL_4(\mathbb{C}) \to SO_6(\mathbb{C})$.

(Попробуйте использовать внешние и симметрические степени, например, в пункте (а) из двумерного пространства V с кососимметрической 2-формой можно получить трёхмерное пространство S^2V с симметрической 2-формой.)

Задача 5 (Маломерные спинорные группы). Проверьте, что гомоморфизмы, построенные в предыдущей задаче, с топологической точки зрения являются двулистными накрытиями.