Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Семинар 6. Классификация представлений.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Классифицируйте все неприводимые конечномерные комплексные представления циклической группы порядка n.

Задача 2. Найдите все одномерные представления группы

$$\text{(а) } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \quad \text{(б) } S_3; \quad \text{(в) } A_4; \quad \text{(г) } D_5.$$

(Одномерные представления также называют характерами, но это не единственный смысл термина характер в теории представлений.)

Задача 3. Классифицируйте все неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 4. Докажите, что все неприводимые двумерные представления группы D_4 изоморфны.

Задача 5 (Задача 3 из семинара 4)**.** (а) Докажите, что в каждом неприводимом двумерном представлении $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ можно выбрать базис так, что

$$\rho : (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Какой вид в этом базисе может иметь матрица $\rho(1\ 2\ 3)$? (Через $(1\ 2\ 3)$ обозначается 3-цикл: $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$.)

(б) Докажите, что у S_3 есть только одно неприводимое двумерное представление с точностью до сопряжённости.

(в) Пусть $\rho : S_3 \to GL(V)$ — произвольное конечномерное комплексное представление группы S_3. Докажите, что собственный вектор оператора $\rho(1\ 2\ 3)$ лежит в S_3-инвариантном подпространстве размерности не выше 2.

(г) Классифицируйте все неприводимые комплексные представления группы S_3.

Задача 6. Классифицируйте неприводимые представления группы S_4.