

**Семинар 7. Характеры представлений.**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

В этом листке все представления предполагаются комплексными и конечномерными.

**Задача 1.** Выпишите таблицу характеров всех неприводимых представлений группы  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

**Задача 2.** В некоторой группе  $G$  всего пять классов сопряжённости, состоящих из 1, 3, 6, 6 и 8 элементов. Найдите недостающие строки в таблице характеров:

	(1)	(3)	(6)	(6)	(8)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	-1	-1	1
$\chi_3$	3	-1	1	-1	0
$\chi_4$	3	-1	-1	1	0

**Задача 3.** Выпишите таблицу характеров всех неприводимых представлений группы  $D_4$ .

**Задача 4.** Пусть представление  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  конечной группы имеет размерность  $d$ . Докажите, что ядро гомоморфизма  $\rho$  состоит в точности из таких элементов  $g \in G$ , что  $\chi(g) = d$ .

**Задача 5.** (а) Покажите, что группа, заданная двумя образующими  $r$  и  $s$  и соотношениями

$$s^2 = r^n = srsr = e,$$

изоморфна группе диэдра  $D_n$ . (Например, переведите  $r$  в поворот на угол  $\frac{2\pi}{n}$ , а  $s$  — в отражение.)

(б) Докажите, что у группы  $D_n$  нет неприводимых представлений размерности выше два. (Проверьте, что если  $v$  — собственный вектор оператора  $\rho(r)$  с собственным значением  $\lambda$ , то  $\rho(s)v$  — тоже собственный, но с другим собственным значением. С каким?)

**Задача 6.** (а) Найдите все классы сопряжённости в группе диэдра  $D_n$ .

(б) Выпишите таблицу характеров группы  $D_n$ .