

Семинар 10. Разложение на неприводимые.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Все представления предполагаются комплексными.

Задача 1. Разложите на неприводимые представления симметрический квадрат неприводимого двумерного представления группы S_3 .

Задача 2. Пусть $\rho : S_4 \mapsto GL_3(\mathbb{C})$ — представление группы S_4 , действующей симметриями правильного тетраэдра, а $sgn : S_4 \mapsto \mathbb{C}^*$ — знаковое представление. Найдите характеры представлений

(а) $\Lambda^2 \rho$; (б) $\rho \otimes sgn$.

Задача 3. (а) Установите изоморфизм между группой вращений правильного тетраэдра и знакопеременной группой A_4 .

(б) Группа вращений правильного тетраэдра тавтологически действует на множестве рёбер тетраэдра. Разложите на неприводимые представления соответствующее перестановочное представление.

Задача 4. Разложите на неприводимые представления тензорный квадрат представления группы S_4 , действующей на трёхмерном пространстве вращениями куба.

Задача 5. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих правильный додекаэдр.

(а) Рассмотрим три действия группы G : на множестве вершин, рёбер и граней додекаэдра. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.

(б) Найдите порядок группы G .

(в) Докажите, что G изоморфна A_5 .

Задача 6. (а) Найдите характер тавтологического представления ρ группы A_5 (действующей на \mathbb{C}^5 перестановками базисных векторов).

(б) Разложите ρ в сумму неприводимых представлений группы A_5 .