Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Семинар 11. Расширения полей.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Обозначим через $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ множество всех вещественных чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональны. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ — подполе поля вещественных чисел.

Задача 2. Какие из следующих подмножеств поля $\mathbb{R}$ являются подполями?

(а) $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$; (б) $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$;

(в) $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$; (г) $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

Задача 3. (а) Покажите, что все подмножества поля $\mathbb{R}$, определённые в предыдущей задаче, являются векторными пространствами над полем рациональных чисел, если определить сложение векторов как сложение вещественных чисел, а умножение на скаляр $\lambda \in \mathbb{Q}$ — как умножение на вещественное число λ.

(б) Постройте базис в каждом из векторных пространств из пункта (а) и найдите размерность.

Задача 4. Отождествим поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ с вещественной плоскостью: числу $a + bi$ сопоставим точку с координатами (a, b). Нарисуйте все комплексные корни уравнения:

(а) $x^4 - 1 = 0$; (б) $x^3 + 1 = 0$; (в) $x^3 - 2 = 0$; (г) $x^4 + 4 = 0$; (д) $x^5 - 1 = 0$.

Задача 5. Пусть $K \subset \mathbb{F}$ — подполе в поле $\mathbb{F}$. Введите на $\mathbb{F}$ структуру векторного пространства над K по аналогии с задачей 3. Обозначим через $\dim_K \mathbb{F}$ размерность векторного пространства $\mathbb{F}$ над полем K (то есть *степень* $[\mathbb{F} : K]$ *расширения* $\mathbb{F}$ над полем K). Найдите размерности:

(а) $\dim_K K$; (б) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$; (в) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$; (г) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Задача 6. Является ли $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ полем при

(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) $n = 4$?

Задача 7. Докажите, что конечное поле состоит из p^n элементов, где p — простое число, а n — натуральное.

Задача 8. (а) Выпишите таблицу умножения для поля из четырёх элементов.

(б) Может ли поле из четырёх элементов быть подполем поля из восьми элементов?

Задача 9. На плоскости даны точки 0 и 1. Можно ли построить с помощью циркуля и линейки корни многочлена

(а) $x^2 - 5x + 7$; (б) $x^3 - 3$; (в) $x^4 + 4$; (г)* $x^4 + x - 5$?

Задача 10. (а) Поделите угол в 19° на 19 равных углов циркулем и линейкой.

(б) Докажите, что угол $\frac{2\pi}{3}$ нельзя поделить циркулем и линейкой на три равных угла.

(в) Поделите угол в 27° на три равных угла циркулем и линейкой.

Задача 11. (а) Найдите все такие $n \leq 16$, что правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой.

(б)* Можно ли построить циркулем и линейкой правильный 17-угольник?