

**Задача 1.** Сколько всего попарно неизоморфных двумерных комплексных представлений у группы

- (а) перестановок  $S_3$ ; (б) диэдра  $D_4$ ?

**Задача 2.** Найдите след

- (а) поворота на угол  $\alpha$  на вещественной плоскости;  
 (б) поворота на угол  $\alpha$  в вещественном трёхмерном пространстве;  
 (в) отражения относительно гиперплоскости в  $n$ -мерном вещественном пространстве.

**Задача 3.** (а) Докажите, что группа вращений куба изоморфна  $S_4$ .

- (б) Сколько классов сопряжённости в группе симметрий куба?  
 (в) Найдите характер тавтологического представления группы симметрий куба.

**Задача 4.** У некоторой конечной группы  $G$  есть ровно три одномерных комплексных представления. Вычисляя характер  $\chi$  одного из этих трёх представлений, один студент<sup>1</sup> обнаружил, что

$$(а) \chi(g) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \quad (б) \chi(g) = i$$

для некоторого  $g \in G$ . Объясните студенту, почему его вычисление не может быть верным.

**Задача 5.** Разложите на неприводимые представления перестановочное представление группы  $S_4$ , действующей на рёбрах куба вращениями.

**Задача 6.** Обозначим через  $V$  пространство однородных многочленов от  $x$  и  $y$  степени  $n$  с комплексными коэффициентами, рассматриваемое как комплексное векторное пространство. Пусть  $\rho : S_3 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  — неприводимое двумерное представление группы  $S_3$ . Определим представление  $Sym^n \rho : S_3 \rightarrow GL(V)$  на пространстве  $V$  по правилу:

$$[Sym^n \rho(g)f](x, y) = f(ax + by, cx + dy), \text{ где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \rho(g)^{-1}.$$

Разложите представление  $(Sym^n \rho, V)$  в прямую сумму неприводимых представлений для

- (а)  $n = 5$ ; (б) произвольного  $n$ .

**Задача 7.** Обозначим через  $\rho$  представление группы  $S_4$ , действующей в трёхмерном пространстве симметриями тетраэдра. Найдите характер

- (а) тензорного квадрата  $\rho \otimes \rho$ ;  
 (б) симметрического квадрата  $S^2 \rho$ ;  
 (в) внешнего квадрата  $\Lambda^2 \rho$
- представления  $\rho$ . Для самопроверки убедитесь, что ответ в (а) совпадает с суммой ответов в (б) и (в).

<sup>1</sup>Сходство с реальными студентами матфака абсолютно случайно.