Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Семинар 9. Тензорные степени.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Выпишите в каком-нибудь базисе матрицу тензорного и внешнего квадратов $T^{\otimes 2}$, $\Lambda^2 T$ и симметрического куба $S^3 T$ оператора T, если известно, что T имеет матрицу:

$$(а)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (б)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Линейный оператор $T : V \to V$ действует на комплексном пространстве V размерности n, и его собственные числа равны $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Выразите через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ след

(а) d-той тензорной, симметрической и внешней степени оператора T.

(б) двойственного оператора $T^* : V^* \to V^*$.

Задача 3. Пусть $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ — тавтологическое представление группы $GL_n(\mathbb{C})$. Вычислите размерность и характер представления $\Lambda^n \rho$.

Задача 4. Пусть $\rho : S_3 \to GL(V)$ — двумерное неприводимое представление группы S_3.

(а) Вычислите характер тензорной степени $\rho^{\otimes n}$.

(б) Разложите $\rho^{\otimes n}$ в прямую сумму неприводимых представлений.

Задача 5. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ — одномерное представление циклической группы $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, в котором 1 действует умножением на $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ Найдите характер двойственного представления ρ^*, то есть представления

$$\rho^* : G \to GL(V^*), \quad \rho^* : g \mapsto [\rho(g^{-1})]^*.$$

Является ли ρ самодвойственным (то есть изоморфны ли ρ и ρ^*)?

Задача 6. Докажите, что все конечномерные комплексные представления симметрической группы самодвойственны.

Задача 7. Пусть $\rho : S_4 \to GL(V)$ — трёхмерное неприводимое представление группы S_4, в котором S_4 действует вращениями куба. Изоморфны ли представления ρ и $\Lambda^2 \rho$?

Задача 8. Пусть T — линейный оператор на n-мерном комплексном векторном пространстве, такой что все его собственные числа по модулю меньше единицы. Докажите равенство

$$\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{Tr}(\Lambda^i T) \right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(S^i T).$$