Алгебра III, осенний семестр 2023 г.

Листок 1. Линейные группы и их приложения. Срок сдачи 20 декабря.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно. Каждый пункт каждой задачи оценивается в один балл.

Задача 1. (а) В некоторой конечной группе можно выбрать по представителю в каждом классе сопряжённости так, что все они будут коммутировать. Докажите, что эта группа коммутативна.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если не требовать конечности группы?

Задача 2. Приведите пример такого представления конечной группы над полем конечной характеристики, что оно не раскладывается в прямую сумму неприводимых.

Задача 3. Пусть $\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ — двумерное представление конечной группы G. Докажите, что если для каждого $g \in G$ одно из собственных чисел оператора $\rho(g)$ равно единице, то ρ распадается в прямую сумму одномерных представлений.

Задача 4 (Разложение Брюа)**.** Обозначим через B подгруппу всех верхнетреугольных матриц в $GL_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Докажите, что имеет место разложение

$$GL_n(\mathbb{F}) = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB,$$

где перестановка w отождествляется со своей матрицей в тавтологическом представлении симметрической группы.

Задача 5 (Исключительные гомоморфизмы)**.** Постройте нетривиальные гомоморфизмы групп

(а) $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$; (б) $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$;
(в) $Sp_4(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$; (г) $SL_4(\mathbb{C}) \to SO_6(\mathbb{C})$.

Задача 6 (Маломерные спинорные группы)**.** Обозначим через $Spin(n)$ универсальную накрывающую группы $SO_n(\mathbb{R})$, а через $Sp(n)$ — максимальную компактную подгруппу в $Sp_{2n}(\mathbb{C})$. Постройте изоморфизмы групп

(а) $SU_2 \simeq Spin(3)$; (б) $SU_2 \times SU_2 \simeq Spin(4)$;
(в) $Sp(4) \simeq Spin(5)$; (г) $SU_4 \simeq Spin(6)$.

Задача 7. (а) При каких условиях на рациональные p и q поле разложения многочлена

$$x^3 + px + q$$

содержит кубический корень из рационального числа, не являющегося полным кубом?

(б) При каких условиях на рациональные p и q поле разложения многочлена

$$x^4 + px^2 + q$$

содержит корень 4-ой степени из рационального числа, не являющегося полным квадратом?

Задача 8. Пусть L — поле разложения рационального многочлена $f = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ над $K = \mathbb{Q}(a_0, a_1, a_2, a_3)$, где a_0, a_1, a_2, a_3 — формальные переменные.

(а) Докажите, что найдётся такой неприводимый кубический многочлен $g \in K[x]$ (*кубическая резольвента*), что поле разложения многочлена g содержится в L.

(б) Выразите коэффициенты многочлена g через $a_0, \ldots, a_3$.

Задача 9. (а) Докажите, что многочлен $f(x) = x^4 + px + p$ неприводим над $\mathbb{Q}$ для всех простых p и при $p \neq 3, 5$ имеет группу Галуа S_4.

(б) Найдите группу Галуа многочлена f при $p = 3$.

(в) Найдите группу Галуа многочлена f при $p = 5$.

Задача 10. Обозначим через $\mathbb{F}_q$ поле из $q = p^n$ элементов.

(а) Докажите, что автоморфизм Фробениуса $x \mapsto x^p$ является линейным оператором на $\mathbb{F}_q$, если $\mathbb{F}_q$ рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. Найдите собственные векторы, собственные числа и характеристический многочлен этого оператора.

(б) Докажите, что $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ является расширением Галуа, и найдите его группу Галуа.