

Семинар 12. Дискриминант.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена $x^4 - x^2 - x - 1$.

(б) Сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найдите λ .

Задача 2. Пусть x_1, \dots, x_n — корни многочлена

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Определим дискриминант $D(f)$ многочлена f как

$$a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2.$$

(а) Выразите через a , b и c дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

(б) Та же задача для биквадратного многочлена

$$ax^4 + bx^2 + c.$$

(в) Выразите через p и q дискриминант кубического многочлена

$$x^3 + px + q.$$

(г) Та же задача для многочлена пятой степени

$$x^5 + px + q.$$

Задача 3. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена

$$(а) x^3 - 2; \quad (б) x^3 + 3x + 1; \quad (в) x^3 - 3x + 1.$$

Найдите степень расширения $[\mathbb{F} : \mathbb{Q}]$.

Задача 4. Для каких простых чисел p многочлен $x^3 + x^2 - 2x - 1$ рассматриваемый по модулю p имеет кратный корень в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 5. Пусть $f(x)$ — неприводимый кубический многочлен с рациональными коэффициентами, а $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все его корни.

(а) Докажите, что \mathbb{F} содержит квадратичное расширение поля \mathbb{Q} тогда и только тогда, когда $D(f)$ не является полным квадратом в \mathbb{Q} . Чему в этом случае равно $[\mathbb{F}, \mathbb{Q}]$?

(б) Докажите, что $[\mathbb{F}, \mathbb{Q}] = 3$ тогда и только тогда, когда $D(f)$ — полный квадрат в \mathbb{Q} .

Задача 6. (а) Покажите, что у кубического многочлена $f(x) = x^3 - 12x - 14$ есть ровно три попарно различных вещественных корня x_1, x_2, x_3 .

(б) Покажите, что в формуле Кардано для корней многочлена $f(x)$ будет фигурировать радикал $\sqrt{-15}$.¹

Задача 7. Обозначим через $\eta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ первообразный корень степени n из единицы.

(а) Найдите в поле $\mathbb{Q}(\eta_5)$ подполе \mathbb{F} степени 2 над \mathbb{Q} .

(б) Найдите в поле $\mathbb{Q}(\eta_7)$ подполя степеней 2 и 3 над \mathbb{Q} .

¹Который сам Кардано назвал “бесполезным числом”, а канал Numberphile снял об этом числе видеоролик “The Useless Number” с Барри Мазуром в роли ведущего.