

Семинар 13. Автоморфизмы полей.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Определение 1. Минимальным многочленом числа $\alpha \in \mathbb{C}$ над \mathbb{Q} называется ненулевой многочлен минимальной степени с рациональными коэффициентами, корнем которого является α .

Задача 1. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Найдите минимальный многочлен над \mathbb{Q} для числа $1 + \alpha^2$.

Задача 2. Найдите минимальный многочлен над \mathbb{Q} для числа $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Задача 3. Докажите, что если $\mathbb{Q}(\alpha)$ — конечное расширение поля \mathbb{Q} , то степень расширения $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ совпадает со степенью минимального многочлена числа α .

Задача 4. Обозначим через η_n первообразный корень из единицы степени n . Найдите степень кругового поля $\mathbb{Q}(\eta_n)$ как расширения поля \mathbb{Q} для всех n от 3 до 17.

Задача 5. Найдите группу всех автоморфизмов поля $\mathbb{Q}(\eta_n)$ для $n = 3, 4, 5, 6$ и 7 .

Задача 6. Есть ли у поля $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ нетривиальные автоморфизмы?

Задача 7. Найдите группу автоморфизмов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Задача 8. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена

$$(a) x^3 - 2; \quad (b) x^3 + 3x + 1; \quad (v) x^3 - 3x + 1.$$

Найдите группу автоморфизмов поля \mathbb{F} .

Задача 9. (a) Найдите такое простое число p , что $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\eta_5)$.

(б) Найдите такое простое число p , что $\sqrt{-p} \in \mathbb{Q}(\eta_7)$.