

Домашнее задание 1.

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Сколько решений имеет сравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \pmod{2027}?$$

Задача 2. Является ли 1613 квадратичным вычетом по модулю 1789?

Задача 3. Найдите 7-адическое разложение для рационального числа $-\frac{5}{6}$.

Задача 4. Вычислите первые десять цифр одного из значений $\sqrt{2}$ в кольце целых 7-адических чисел \mathbb{Z}_7 .

Задача 5. Определим подгруппу $H_3 \subset \mathbb{Q}$ как множество всех рациональных чисел, знаменатель которых является степенью тройки:

$$H_3 = \left\{ \frac{m}{3^k} \mid m, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\},$$

Покажите, что группа автоморфизмов $\text{Aut}(H_3/\mathbb{Z})$ изоморфна подгруппе в мультипликативной группе \mathbb{Z}_3^* кольца целых 3-адических чисел.