

Домашнее задание 2.

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Выясните, какие простые числа представляются в виде $x^2 + xy + y^2$ для целых x и y .

Задача 2. Найдите квадратичное подполе (то есть поле вида $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d — целое число, не являющееся полным квадратом) в поле $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{7}})$.

Задача 3. Покажите, что кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ не является факториальным, когда $d \equiv 2 \pmod{4}$ и $d < -2$.

Задача 4. Пусть \mathcal{O}_K — кольцо целых квадратичного поля $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-30})$. Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ главный идеал $(p) \subset \mathcal{O}_K$ является квадратом простого идеала?

Задача 5. Найдите группу классов идеалов и нарисуйте все возможные формы решёток идеалов (с точностью до подобия) в кольце целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$.