

## Семинары 4-5. Поле $p$ -адических чисел

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Покажите, что в кольце целых  $10$ -адических чисел есть делители нуля.

**Задача 2.** Вычислите первые  $10$  цифр (считая справа налево)  $5$ -адического числа:

(а)  $(\dots 123123) + (\dots 010101)$ ; (б)  $(\dots 123123) \cdot (\dots 010101)$ ; (в)  $3^{-1}$ ; (г)  $\sqrt{-1}$ .

**Задача 3.** Найдите  $p$ -адическое разложение для

(а)  $\frac{2}{3}$  в  $\mathbb{Q}_2$ ; (б)  $-\frac{1}{6}$  в  $\mathbb{Q}_7$ ; (в)  $\frac{1}{10}$  в  $\mathbb{Q}_{11}$ ; (г)  $\frac{1}{120}$  в  $\mathbb{Q}_5$ .

**Определение.** Пусть  $p$  простое число. Определим  $p$ -адическую норму  $\|\cdot\|_p$  на  $\mathbb{Q}$  следующим образом. Если ненулевое рациональное число  $x$  представляется в виде

$$x = p^k \frac{m}{n},$$

где  $m, n, k$  — целые числа, и при этом  $m$  и  $n$  не делятся на  $p$ , то

$$\|x\|_p = \frac{1}{p^k}.$$

Также положим  $\|0\|_p = 0$ .

**Задача 4.** (а) Докажите, что  $p$ -адическая норма удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\|x\|_p + \|y\|_p \geq \|x + y\|_p$$

(б) Докажите, что если два  $p$ -адических диска в  $\mathbb{Q}$  имеют непустое пересечение, то один из них содержится в другом. (Под  $p$ -адическим диском радиуса  $r$  с центром в  $x_0$  понимается множество  $\{x \in \mathbb{Q} \mid \|x - x_0\|_p \leq r\}$ .)

(в) Сколько центров может иметь  $p$ -адический диск?

**Задача 5** (Мечта студента). Покажите, что относительно  $p$ -адической нормы последовательность частичных сумм ряда с рациональными членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

фундаментальна тогда и только тогда, когда последовательность  $a_n$  стремится к нулю.

**Задача 6.** (а) Какие рациональные числа являются пределами последовательностей целых чисел относительно  $p$ -адической нормы?

(б) Постройте изоморфизм между пополнением подмножества  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  относительно  $p$ -адической нормы и кольцом  $\mathbb{Z}_p$  целых  $p$ -адических чисел.

(в) Введите на  $\mathbb{Z}_2$  топологию (с помощью пункта (б) или прямо из определения) и постройте гомеоморфизм между  $\mathbb{Z}_2$  и канторовым множеством.

**Задача 7.** Как по  $p$ -адической записи рационального числа  $x$  узнать, положительно  $x$  или отрицательно?

**Задача 8.** Определим подгруппу  $H_2 \subset \mathbb{Q}$  как множество всех рациональных чисел, знаменатель которых является степенью двойки:

$$H_2 = \left\{ \frac{m}{2^k} \mid m, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\},$$

Опишите группу автоморфизмов  $\text{Aut}(H_2/\mathbb{Z})$ .