Семинар $6\frac{1}{2}$-7. Кольца целых в квадратичных полях

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Пусть α — целое алгебраическое число, а $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $f(\alpha)$ — тоже целое алгебраическое.

(б) Докажите, что сумма и произведение двух целых алгебраических чисел будут целыми алгебраическими. (Если общий случай вызывает затруднения, начните с целых алгебраических чисел степени два.)

(в) Пусть α — корень многочлена x^3+x+1, а β — корень многочлена x^2+2. Найдите в $\mathbb{Z}[x]$ ненулевой многочлен минимальной степени, корнем которого является $\alpha+\beta$.

Задача 2. Какие из следующих колец (а) евклидовы; (б) факториальны?

(1) $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$; (2) $\mathbb{R}[x,y]$; (3) $\mathbb{Z}[x]$; (4) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$; (5) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Задача 3. Пусть d — целое число, свободное от квадратов.

(а) Докажите, что все целые алгебраические элементы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ образуют кольцо (оно называется *кольцом целых* квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$).

(б) Докажите, что при $d=-1$ кольцо целых совпадает с кольцом $\mathbb{Z}[i]$ целых чисел Гаусса, а при $d=-3$ совпадает с кольцом $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$ целых чисел Эйзенштейна.

(в) Найдите кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ для произвольного d.

Задача 4. Докажите, что при $d = 1, 2, 3, 7, 11$ кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ будет евклидовым относительно нормы $N(a+b\sqrt{d}) = a^2+db^2$.

Задача 5. Пусть $d \in \mathbb{Z}$ свободно от квадратов. Докажите, что кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ не является евклидовым относительно нормы квадрат модуля при $d > 11$, и $d = 5, 6, 10$.

Задача 6. Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(а) Найдите кольцо вычетов $R/(2)$.

(б) Разложите идеал $(6) \subset R$ в произведение простых идеалов.

Задача 7 ($\star$)**.** Какие простые числа p представляются в виде x^2+5y^2 для целых x и y?