Семинар 8. Цепные дроби

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите цепную дробь по вещественному числу, а вещественное число — по цепной дроби:

$$\text{(а) } \frac{55}{34}; \quad \text{(б) } \sqrt{5}; \quad \text{(в) } \sqrt{3}; \quad \text{(г) } [1,2,2,2,2,...]; \quad \text{(д) } [1,3,3,3,3,...].$$

Задача 2. Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ — это n-ая подходящая дробь положительного вещественного числа $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots]$ (для определённости положим $\frac{p_1}{q_1} := a_0$). Обозначим через e_n вектор (q_n, p_n) на плоскости. Положим $e_0 := (0,1)$ и $e_{-1} := (1,0)$.

(а) Проверьте, что $e_{n+1} = e_{n-1} + a_n e_n$, векторы e_n и e_{n+1} образуют базис в целочисленной решётке $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ и лежат по разные стороны от прямой $y = \alpha x$.

(б) Чему равна ориентированная площадь параллелограмма Π_n, натянутого на векторы e_n и e_{n+1}?

(в) Докажите, что параллелограмм Π_n не содержит целых точек, кроме вершин.

(г) Докажите, что

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Можно ли улучшить это приближение, то есть найти такие натуральные p и q, что $q \le q_n$ и $|\alpha - \frac{p}{q}| < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$?

Задача 3. Докажите, что для любых натуральных чисел p и q выполнено неравенство

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{5q^2}.$$

Иными словами, $\sqrt{2}$ не слишком хорошо приближается рациональными числами.

Задача 4. Найдите все решения уравнения Пелля

$$x^2 - dy^2 = 1$$

для (а) $d = 2$; (б) $d = 3$; (в) $d = 5$.

Задача 5 (Алгоритм Шенкса для логарифма)**.** Найдите пятую подходящую дробь для $\log_2 3$ без таблиц логарифмов.[1]

---

[1] Используйте мультипликативную версию алгоритма Евклида следующим образом. Пусть a и b — вещественные числа такие, что $1 < a < b$. Положим $a_1 = a$ и $b_1 = b$. На i-том шаге алгоритма мы делаем следующее:

(1) Ищем такое натуральное число x_i, что

$$a_i^{x_i} \le b_i < a_i^{x_i+1}.$$

(2) Если $a_i^{x_i} = b_i$, то алгоритм закончен за i шагов.

(3) Если $a_i^{x_i} < b_i$, то переходим к $(i+1)$-му шагу алгоритма с числами

$$a_{i+1} = \frac{b_i}{a_i^{x_1}} \text{ и } b_{i+1} = a_i.$$

Тогда цепная дробь для $\log_a b$ равна $[x_1, x_2, x_3, \ldots]$.