

Домашнее задание 3.

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Какие простые числа представляются в виде $x^2 + 3y^2$ для целых x и y ?

Задача 2. Найдите все решения уравнения Пелля

$$x^2 - 57y^2 = 1.$$

Задача 3. Для целых a и b обозначим через $P_{a,b}$ множество всех простых натуральных чисел вида $ak + b$, где $k \in \mathbb{Z}$. Определим функцию $g_{a,b}(s)$ вещественной переменной $s > 1$ по формуле:

$$g_{a,b}(s) := \sum_{p \in P_{a,b}} \frac{1}{p^s}.$$

Вычислите

$$\lim_{s \rightarrow +1} \frac{g_{8,7}(s)}{g_{4,1}(s)}.$$

Задача 4. Вычислите $\zeta(6)$.

Задача 5. Существует ли такое целое число a , не являющееся полным квадратом, что сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

разрешимо для всех простых чисел p за исключением, быть может, конечного количества?