

Домашнее задание 4.

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Вычислите значение j -инварианта:

$$j\left(\frac{2023 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 2. Предъявите пример гладкой плоской кубики, на которой j -инвариант принимает значение из задачи 1.

Задача 3. Эллиптическая кривая над \mathbb{Q} задана уравнением

$$y^2 + xy + y = x^3 - x^2 - 3x + 3,$$

в качестве нулевого элемента выбрана бесконечно удалённая точка. Через P и Q , соответственно, обозначим точки $(1, 0)$ и $(-1, -2)$ на кривой. Найдите координаты точек $2P$ и $P + Q$.

Задача 4 (Продолжение задачи 3). Найдите порядок циклической подгруппы, порождённой точкой P .

Задача 5. Для эллиптической кривой E из задач 3 и 4 найдите группу кручения $E_{tors}(\mathbb{Q})$.