Семинар 10. Распределение простых чисел

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Докажите, что числа 1, 2, ..., n ни при каком $n > 1$ нельзя разбить на два множества так, чтобы произведение чисел одного из них равнялось произведению чисел другого.

Задача 2. Рассмотрим все целые точки внутри квадрата $\{0 \le x, y \le N\}$. Обозначим через p_N вероятность того, что целочисленная длина отрезка, соединяющего одну из этих точек с началом координат, равна единице. Найдите явную формулу для

$$\lim_{N\to\infty} p_N.$$

(Напомним, что *целочисленной длиной* отрезка с целыми вершинами называется количество целых точек на отрезке, включая концы, минус один.)

Задача 3 (Серр, глава VI, предложение 5)**.** Пусть d — целое число, свободное от квадратов. Положим $m = 4|d|$.

(а) Докажите, что существует единственный такой характер $\chi_d : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$, что для всех простых чисел p, не делящих d выполняется условие:

$$\chi_d(p) = \left(\frac{d}{p}\right).$$

(Подсказка: используйте квадратичный закон взаимности.)

(б) Проверьте, что $\chi_d^2 = 1$, и $\chi_d \neq 1$ при $a \neq 1$.

Задача 4. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ — квадратичное поле. Найдите такой характер Дирихле χ, чтобы выполнялось тождество:

$$\zeta_K(s) = L(\chi, s)\zeta(s).$$

(Подсказка: разложите обе дзета-функции, и Римана, и Дедекинда, в бесконечное произведение. Характер возьмите из предыдущей задачи.)

Задача 5 ($\star$ Серр, глава VI, раздел 3.4)**.** Обозначим через $G(m)$ группу $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

(а) Пусть p — простое число, не делящее m. Обозначим через $\operatorname{ord}(p)$ порядок вычета $[p]_m$ в группе $G(m)$, а через $\operatorname{ind}(p)$ индекс подгруппы, порождённой $[p]_m$, в $G(m)$. Докажите тождество для многочленов от t:

$$\prod_{\chi}(1 - \chi(p)t) = (1 - t^{\operatorname{ord}(p)})^{\operatorname{ind}(p)}.$$

Здесь и далее произведение берётся по всем характерам группы $G(m)$.

(б) Определим функцию $\zeta_m(s)$ как произведение L-функций:

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(s, \chi).$$

Докажите тождество:

$$\zeta_m(s) = \prod_{p\nmid m} \frac{1}{(1 - \frac{1}{p^{\operatorname{ord}(p)}})^{\operatorname{ind}(p)}}.$$

(в) Проверьте, что $\zeta_m(s)$ имеет простой полюс при $s = 1$ и выведите отсюда, что $L(1, \chi) \neq 0$ для каждого нетривиального характера χ.