Семинар 11. Модулярная группа

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Объясните, почему дробно-линейное преобразование комплексной плоскости

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad F : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc \neq 0$$

переводит прямые и окружности в прямые или окружности.

Задача 2. Через $H \subset \mathbb{C}$ обозначим верхнюю полуплоскость: $H = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. Определим дробно-линейные преобразования верхней полуплоскости:

$$S : z \to -\frac{1}{z}; \quad T : z \to z + 1.$$

Зададим подмножество $D \subset H$ неравенствами $|z| \geq 1$ и $|\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$.

(а) Нарисуйте образы области D при действии преобразований

$$1,\ T,\ TS,\ ST^{-1}S,\ ST^{-1},\ S,\ ST,\ STS,\ T^{-1}S,\ T^{-1}.$$

(б) Докажите, что для каждого $z \in H$ найдётся такой элемент $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$, что $g(z) \in D$.

(в) Найдите все такие точки $z \in D$ и все такие неединичные элементы $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$, что $g(z) \in D$.

Задача 3. (а) Проверьте, что S и T порождают модулярную группу.

(б) Проверьте, что в модулярной группе выполняются соотношения $S^2 = e$, $(ST)^3 = e$.

(в) Найдите такую композицию преобразований S и T, которая переводит число $\frac{5}{3}$ в число 0. Ответ: $T^2ST^3ST(\frac{5}{3}) = 0$.

(г*) Докажите, что каждое соотношение между S и T в модулярной группе следует из соотношений пункта (б).

Задача 4. В вершинах квадрата $ABCD$ стоят четыре школьника и держат два каната: один канат соединяет вершины A и D, второй — вершины B и C. Школьники выполняют два типа перемещений, S и T, не выпуская из рук канатов. Тип S: каждый школьник перемещается в соседнюю вершину квадрата (по часовой стрелке). Тип T: школьники из вершин A и B меняются местами, при этом школьник из вершины B должен пройти *под* канатом школьника из вершины A.

(а) Нарисуйте зацепление канатов после композиции T^2ST^3. (Слово читается справа налево, то есть сначала три раза проделывается T, потом S и т.д.)

(б) Найдите последовательность перемещений S и T, которая позволит школьникам распутать зацепление из пункта (а)[1]. Подсказка: Используйте ответ в 3(в)

[1] Хотите повторить с настоящими школьниками — смотрите https://youtu.be/-kU7loNwJ84