Семинар 9. Вокруг дзета-функции Римана

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2024 г.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Выясните, при каких значениях $s \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Задача 2. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Через P обозначается множество всех простых натуральных чисел.

(а) Докажите, что при $s > 1$ справедливо тождество:

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p^s} = \ln \zeta(s) - \sum_{p \in P} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j p^{js}}.$$

(*Подсказка: прологарифмируйте формулу произведения для* $\zeta(s)$.)

(б) Докажите, что

$$\lim_{s \to +1} \sum_{p \in P} \frac{1}{p^s} = \lim_{s \to +1} \ln \zeta(s).$$

Задача 3. Выясните, при каких значениях $s \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p^s}.$$

Задача 4. (а) Пусть $f(x)$ многочлен степени n с корнями $a_1, \ldots, a_n$. Проверьте, что

$$f(x) = f(0) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{a_k}\right).$$

(б) Какая формула получится в пункте (a), если вместо многочлена чисто формально подставить функцию

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}?$$

Задача 5. (а) Пользуясь формулой Эйлера бесконечного произведения для синуса:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right), \qquad (E)$$

вычислите $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, ...

(б) Докажите, что $\operatorname{sh}(z) = \lim_{n \to \infty} p_n(z)$, где многочлены $p_n(z)$ определяются формулой:

$$p_n(z) := \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \right].$$

(в) Проверьте, что если $n = 2m + 1$, то

$$p_n(z) = z \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi k}{n}}\right).$$

(г) С помощью пунктов (б) и (в) докажите формулу (E). (*Подсказка: читайте статью W.F. Eberlein, “On Euler’s Infinite Product for the Sine”.*)