ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

ЗАПИСКИ К КУРСУ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Валентина Кириченко

1. Пространство с оператором

I have not thought it necessary to undertake the labor of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree[a]

[a] Я не счёл необходимым брать на себя труд строгого доказательства этой теоремы в общем случае для любой матрицы произвольного размера

Артур Кэли (о теореме Гамильтона–Кэли)

Пусть V — конечномерное комплексное пространство, а $T : V \to V$ — линейный оператор. Наша цель — построить такой базис в V, в котором матрица оператора T имеет максимально простой вид. Это полезно для решения разностных и дифференциальных уравнений.

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{C}^2$, а матрица оператора T в стандартном базисе (e_1, e_2) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если найти базис (f_1, f_2), в котором матрица оператора T диагональна, то есть имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

для некоторых λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, то легко получится явная формула для чисел Фибоначчи. В самом деле, если последовательность чисел a_1, a_2, a_3,… удовлетворяет условию

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

для всех натуральных n, то

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}, \text{ откуда } A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Осталось использовать, что $A = PBP^{-1}$, где P — это матрица перехода от базиса (e_1, e_2) к базису (f_1, f_2) (то есть P удовлетворяет матричному тождеству $(e_1, e_2)P = (f_1, f_2)$). Поскольку диагональную матрицу возводить в степень легко и приятно, мы немедленно получаем

$$A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})}_{n} = PB^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Упражнение 1. В “школьном” выводе формулы для чисел Фибоначчи [V] используется такой же алгоритм, но без упоминания векторных пространств и операторов (поэтому решение производит впечатление чёрной магии). Переведите рассуждения из [V, п. 16] на язык линейной алгебры.

К сожалению, не каждый оператор можно *диагонализовать*, то есть найти базис, в котором матрица оператора диагональна. Простой пример недиагонализуемого оператора можно привести уже в размерности два.

Упражнение 2. Пусть $V = \mathbb{C}^2$, а матрица оператора T в стандартном базисе (e_1, e_2) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что ни в каком базисе матрица оператора T не будет диагональной.

В качестве паллиатива придумали *жорданову нормальную форму* (ЖНФ). Это не единственный способ борьбы с недиагонализуемыми операторами — есть и другие, например, фробениусова нормальная форма. Однако в приложениях к дифференциальным уравнениям популярна именно ЖНФ, поэтому мы сконцентрируемся на ней.

Обозначим через n размерность пространства V, а через $I : V \to V$ — тождественный оператор.

Определение 1.

(1) Собственным подпространством V^λ оператора T с собственным значением λ называется ядро оператора $(T - \lambda I)$:

$$V^{(\lambda)} := \mathrm{Ker}(T - \lambda I).$$

Ненулевые векторы из собственного подпространства называют собственными векторами.

(2) Корневым подпространством $V^{(\lambda)}$ оператора T с собственным значением λ называется ядро оператора $(T - \lambda I)^n$:

$$V^{(\lambda)} := \mathrm{Ker}(T - \lambda I)^n.$$

Из этого определения сразу следует, что корневое подпространство $V^{(\lambda)}$ содержит собственное подпространство V^λ. Кажется несколько произвольным выбор степени $(T - \lambda I)^n$ в определении корневого подпространства. Однако несложно проверить (проверьте!), что последовательность подпространств

$$\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda I)^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda I)^n \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda I)^{n+1} \subset \ldots$$

стабилизируется при некотором $k \le n$, в частности, заведомо имеют место равенства $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)^n = \mathrm{Ker}(T - \lambda I)^{n+1} = \ldots$.

Упражнение 3. Покажите, что оператор диагонализуем тогда и только тогда, когда из его собственных векторов можно выбрать базис.

Теорема 1. *Жорданова нормальная форма*

(1) *Пространство V разлагается в прямую сумму корневых подпространств:*

$$V = \bigoplus V^{(\lambda)},$$

причём каждое корневое подпространство инвариантно относительно оператора T.

(2) *Каждое корневое подпространство $V^{(\lambda)}$ разлагается в прямую сумму T-инвариантных подпространств:*

$$V^{(\lambda)} = \bigoplus_{i=1}^{k_\lambda} V_i^{(\lambda)}$$

так, что в каждом $V_i^{(\lambda)}$ можно выбрать базис вида f_i^λ, $(T-\lambda I)f_i^\lambda$, $(T-\lambda I)^2 f_i^\lambda$, …, $(T-\lambda I)^{d_i^\lambda - 1} f_i^\lambda$, где $d_i^\lambda = \dim V_i^{(\lambda)}$.

Упражнение 4. Выведите из теоремы 1, что матрица оператора T в некотором базисе имеет блочно-диагональный вид, в котором блоки — это жордановы клетки (определение жордановых клеток см., например, в [Р, п. 2.10]).

В следующих разделах мы докажем теорему 1. Как ни странно, существенную роль в доказательстве будет играть кольцо многочленов $\mathbb{C}[t]$. В частности, мы будем использовать деление многочленов с остатком и алгоритм Евклида. Мы во многом следуем замечательной статье [А], в которой алгоритм Евклида для многочленов прямо не упоминается, но неявно используется.

Упражнение 5. Докажите теорему 1 при $n = 2$, в частности, разберитесь, сколько ненулевых корневых подпространств может быть у оператора на $\mathbb{C}^2$, и какие у них могут быть размерности.

2. Минимальный многочлен оператора

Immer mit den einfachsten Beispielen anfangen[a]

[a]Всегда начинайте с простейших примеров

Давид Гильберт

Про оператор $T : V \to V$ можно думать как про физический процесс с дискретным временем, то есть преобразование T^n задаёт переход от нулевого момента времени к моменту времени n. Траектория каждого вектора $v \in V$ при таком физическом процессе состоит из векторов v, Tv, T^2v,…. Заметим, что векторы $\{T^k v \mid k \in \mathbb{N}\}$ порождают T-инвариантное подпространство $U \subset V$, которое может совпасть с V, а может и не совпасть. В любом случае, поскольку пространство V конечномерно, между векторами $\{T^k v \mid k \in \mathbb{N}\}$ найдётся нетривиальная линейная зависимость:

$$a_0 v + a_1 T v + \ldots + a_n T^n v = 0 \text{ или } (a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n)v = 0.$$

Рассмотрим многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

Упражнение 6. Докажите, что оператор $f(T)$ аннулирует подпространство U, то есть $f(T)u = 0$ для всех $u \in U$.

Из этого упражнения несложно вывести, что найдётся такой ненулевой многочлен $g \in \mathbb{C}[t]$, что $g(T)$ — нулевой оператор, то есть g *аннулирует* T. В самом деле, мы можем выбрать конечное число векторов $v_1, \ldots, v_\ell$ таким образом, чтобы их траектории $\{T^k v_i \mid k \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, \ell\}$ порождали V. Для каждой траектории найдём свой многочлен f_i, как в упражнении 6. Тогда произведение коммутирующих операторов $f_1(T) \cdots f_\ell(T)$ будет аннулировать все векторы в V, поэтому можно взять $g = f_1 \cdots f_\ell$.

Определение 2. Унитарный (=со старшим коэффициентом 1) многочлен $m(t) \in \mathbb{C}[t]$ называется минимальным многочленом оператора T, если m аннулирует T и при этом имеет минимальную возможную степень среди всех ненулевых многочленов, аннулирующих T.

По основной теореме алгебры минимальный многочлен раскладывается на линейные множители:

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s},$$

где $\lambda_1,\ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ — попарно различные корни, а $m_1,\ldots, m_s \in \mathbb{N}$ — их кратности. В дальнейшем мы будем многократно использовать это разложение.

Упражнение 7. Покажите, что у оператора T есть ненулевое собственное подпространство с собственным значением λ тогда и только тогда, когда λ — корень минимального многочлена.

Будем доказывать первую часть теоремы 1 индукцией по s, то есть по числу попарно различных корней минимального многочлена. При $s = 1$ (база индукции) нам нужно показать, что $V = V^{(\lambda_1)}$. Это верно, поскольку $(T - \lambda_1)^{m_1}$ — нулевой оператор, то есть $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)^{m_1} = V$. Теперь докажем индукционный переход. Представим $m(t)$ как произведение многочленов $f(t) = (t - \lambda_1)^m_1$ и $g(t) = (t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$. Поскольку многочлены f и g взаимно просты в $\mathbb{C}[t]$, для них справедлива следующая:

Ключевая лемма 1. *Пусть f и g — взаимно простые многочлены в $\mathbb{C}[t]$. Тогда пространство V разлагается в прямую сумму ядер операторов $f(T)$ и $g(T)$:*

$$V = \mathrm{Ker}(f(T)) \oplus \mathrm{Ker}(g(T)).$$

Доказательство. По алгоритму Евклида найдутся такие многочлены p, q, что

$$p(t)f(t) + q(t)g(t) = 1, \text{ откуда } p(T)f(T) + q(T)g(T) = I.$$

Применив последнее тождество к вектору, получаем что для каждого вектора $v \in V$ есть разложение:

$$v = p(T)f(T)v + q(T)g(T)v. \tag{1}$$

Выведем из тождества (1), что $\mathrm{Ker}(f(T)) \cap \mathrm{Ker}(g(T)) = \{0\}$. Действительно, если $v \in \mathrm{Ker}(f(T)) \cap \mathrm{Ker}(g(T))$, то $f(T)v = 0$ и $g(T)v = 0$, поэтому:

$$v = p(T)f(T)v + q(T)g(T)v = p(T)0 + q(T)0 = 0.$$

Упражнение 8. Проверьте, что $f(T)u \in \mathrm{Ker}(g(T))$ и $g(T)u \in \mathrm{Ker}(f(T))$ для каждого вектора $u \in V$.

Осталось проверить, что $\mathrm{Ker}(f(T)) + \mathrm{Ker}(g(T)) = V$. Снова воспользуемся тождеством (1) в несколько изменённой форме:

$$v = f(T)p(T)v + g(T)q(T)v.$$

По предыдущему упражнению $f(T)p(T)v \in \mathrm{Ker}(g(T))$ и $g(T)q(T)v \in \mathrm{Ker}(f(T))$. Следовательно, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы векторов из $\mathrm{Ker}(f(T))$ и $\mathrm{Ker}(g(T))$. □

Для завершения индукционного перехода осталось проверить, что $\mathrm{Ker}(f(T)) = V^{(\lambda_1)}$ при $f(t) = (t - \lambda_1)^m_1$ (проверьте!), а к $\mathrm{Ker}(g(T))$ применить предположение индукции (примените!).

3. Пространство с нильпотентным оператором

I presume that to the uninitiated the formulae will appear cold and cheerless; but let it be remembered that, like other mathematical formulae, they find their origin in the divine source of all geometry[a]

[a] Я полагаю, что для неискушённых эти формулы кажутся холодными и безжизненными, но нужно помнить, что как и другие математические формулы, они берут своё начало в божественном источнике всей геометрии

Бенджамин Пирс

В предыдущем разделе мы доказали первую часть теоремы 1. Чтобы доказать её вторую часть, достаточно рассмотреть случай нильпотентного оператора N, действующего на подпространстве $U \subset V$. Напомним, что оператор нильпотентен, если его минимальный многочлен имеет вид t^m. Действительно, если $V^{(\lambda)}$ — корневое подпространство оператора T с собственным значением λ, то оператор $N = T - \lambda I|_{V^{(\lambda)}}$ на подпространстве $U = V^{(\lambda)}$ является нильпотентным.

Вторая часть теоремы 1 эквивалентна тому, что у N есть *жорданов* или *циклический* базис, состоящий из траекторий некоторых векторов $f_1,\dots, f_k$ при действии оператора N:

$$\{f_1, Nf_1, N^2 f_1, \dots, N^{d_1-1} f_1; \dots; f_k, Nf_k, N^2 f_k, \dots, N^{d_k-1} f_k\}.$$

При этом $N^{d_i} f_i = 0$ для всех $i = 1,\dots, k$. Для удобства будем упорядочивать жорданов базис так, чтобы $d_1 \geq \ldots \geq d_k$. Графически можно изобразить такой базис в виде диаграммы Юнга:

$$\begin{array}{lllllllllll}
0 & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\
0 & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & & \\
0 & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & & \\
0 & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & & & & & &
\end{array}$$

Пример 2. Предположим, что траектория $\{v, Nv, \dots, N^{m-1}v\}$ вектора $v \in U$ порождает всё пространство V. В этом случае диаграмма Юнга жорданова базиса состоит из единственной строки длины $m = \dim V$.

Заметим, что длины строк $\{d_1, \dots, d_k\}$ диаграммы Юнга жорданова базиса однозначно восстанавливаются по длинам столбцов. Следующее упражнение показывает, что длины столбцов — инварианты оператора N (то есть не зависят от выбора жорданова базиса).

Упражнение 9. Докажите, что длина i-того столбца в диаграмме Юнга жорданова базиса оператора N равна:

$$\dim \operatorname{Ker}(N^i) - \dim \operatorname{Ker}(N^{i-1}).$$

Предъявим алгоритм поиска жорданова базиса. Для наглядности изложим его в терминах диаграммы Юнга. Обозначим через l_i длину i-того столбца диаграммы, то есть $l_i := \dim \operatorname{Ker}(N^i) - \dim \operatorname{Ker}(N^{i-1})$. Первый шаг — это построение базисных векторов $f_1, \dots, f_{l_m}$. Они будут стоять в последнем столбце диаграммы, а их траектории (длины d_1) будут самыми длинными. Выберем $f_1, \dots, f_{l_m} \in U$ так, чтобы $\operatorname{Ker}(N^{m-1})$

и $f_1,\dots, f_{l_m}$ порождали U. Это всегда возможно, поскольку $\dim U - \mathrm{Ker}(N^{m-1}) = l_m$. Если $m=1$, то на этом построение базиса заканчивается. Если $m>1$, то добавим к уже выбранным базисным векторам $f_1,\dots,f_{l_m}$ их образы $Nf_1,\dots,Nf_{l_m}$ (последние частично заполнят предпоследний столбец диаграммы Юнга).

Упражнение 10. Докажите, что векторы $f_1,\dots, f_{l_m}$, $Nf_1,\dots, Nf_{l_m}$ линейно независимы.

Теперь повторяем шаг алгоритма для столбца с номером $m-1$, а именно выбираем векторы $f_{l_m+1},\dots, f_{l_m+l_{m-1}}$, так чтобы $\mathrm{Ker}(N^{m-2})$, $Nf_1, \dots, Nf_{l_m}$ и $f_{l_m+1},\dots, f_{l_m+l_{m-1}}$ порождали $\mathrm{Ker}(N^{m-1})$. Если $m=2$, то на этом построение базиса заканчивается. Если $m>2$, то мы, как и на первом шаге, добавляем к уже выбранным векторам их образы при действии оператора N и продолжаем применять алгоритм, пока не дойдём до первого столбца диаграммы Юнга.

4. Заключение

I found though that the former proof was too concrete and the latter proof too abstract, and so I never really got a good intuition on how the theorem really worked [a]

[a] Я считал первое доказательство слишком конкретным, а второе — слишком абстрактным, поэтому так и не понял на интуитивном уровне, как эта теорема на самом деле работает

Теренс Тао о ЖНФ

Отчасти эти записки мотивированы известным письмом студентов матфака, в котором высказывалось мнение, что теорему о ЖНФ нужно выводить из теоремы о строении конечнопорождённых модулей над кольцами главных идеалов. Поскольку большинство студентов, изучающих линейную алгебру, всё же сначала изучают теорему о ЖНФ, а не модули над кольцом многочленов, я решила изложить промежуточное доказательство — достаточно коцептуальное с одной стороны (то есть не совсем "руками для инженеров"), и достаточно простое с другой стороны (то есть не использующее "умных слов" помимо тех, что изучают в стандартных курсах линейной алгебры). Уже дописав эти записки, я обнаружила, что похожее доказательство приводится в блоге Теренса Тао [T] причём с абсолютно такой же мотивацией. Доказательство первой части теоремы о ЖНФ в разделе 2 практически идентично доказательству в [T], а доказательство второй части в разделе 3 отличается (оно более конкретно и менее концептуально, чем в [T]). Поэтому я надеюсь, что эти записки отражает не только мои личные вкусы и могут пригодиться тем русскоязычным студентам, кто пока ещё не отваживается читать англоязычные математические тексты.

Список литературы

[A] Sh. Axler, *Down with determinants!*, American Mathematical Monthly **102** (1995), 139–154
[P] Т.Е. Панов, *Линейная алгебра и геометрия*, записки лекций
[T] T. Tao, *The Jordan normal form and the Euclidean algorithm*, блог
[V] Н.Н. Воробьёв, *Числа Фибоначчи*, М., "Наука" 1978 г.

факультет математики, НИУ ВШЭ
E-mail address: vkiritch@hse.ru